TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

--🙦🕮🙤--



**BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ**

**ĐỀ TÀI: PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH F(X)=0**

Giảng viên hướng dẫn: Hà Thị Ngọc Yến Nhóm sinh viên**:**

1. Đặng Trần Tiến − MSSV: 20195927 2. Vũ Đinh Trường An − MSSV: 20195837

Tháng 10 năm 2020

1

**MỤC LỤC**

**LỜI NÓI ĐẦU** ....................................................................................................................... 2 **I. GIỚI THIỆU PHƯƠNG PHÁP** ........................................................................................... 3 **II. LÝ THUYẾT**...................................................................................................................... 3

**1. Bài toán** ...................................................................................................................... 3 **2. Nhắc lại về khoảng cách ly nghiệm**............................................................................... 3 **3. Phương pháp lặp đơn** .................................................................................................. 4

*a. Ý tưởng bài toán*........................................................................................................ 4 *b. Xây dựng công thức*................................................................................................... 4 *c. Sự hội tụ của phương pháp*......................................................................................... 4 *d. Công thức đánh giá sai số* .......................................................................................... 5 *e. Đánh giá phương pháp* .............................................................................................. 7

**III. THUẬT TOÁN**.................................................................................................................. 7 *1. Chương trình chính*........................................................................................................ 7 2. *Gói kiểm tra đầu vào* ..................................................................................................... 8 *3. Khởi tạo hàm* ��′(��) ........................................................................................................ 8 *4. Gói giá trị lớn nhất* ......................................................................................................... 9 *5. Gói lặp đơn tiên nghiệm*................................................................................................. 9 *6. Gói lặp đơn hậu nghiệm* .............................................................................................. 10 *7. Gói điều kiện co*........................................................................................................... 10

**IV. CHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ** ...................................................................... 10 **TÀI LIỆU THAM KHẢO** ...................................................................................................... 15

1

**LỜI NÓI ĐẦU**

Trong phạm vi môn Giải tích số, sau khi tìm hiểu về bài toán giải phương trình f(x)=0 bằng phương pháp lặp đơn, chúng em xin phép được trình bày lại nội dụng của phương pháp lặp đơn trong bài báo cáo này. Nội dung chính của bài báo cáo bao gồm: Lý thuyết cơ bản, Thuật toán, Chương trình và hệ thống ví dụ và Ưu điểm và nhược điểm của phương pháp.

Do khả năng còn hạn chế nên bản báo cáo không thể tránh khỏi những thiếu sót về mặt nội dung và hình thức nên rất mong nhận được sự đóng góp của cô và các bạn để bản báo cáo có thể hoàn thiện hơn.

Chúng em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến cô Hà Thị Ngọc Yến đã có những hướng dẫn, góp ý rất chi tiết để chúng em có thể hoàn thành bài báo cáo này.

2

**I. GIỚI THIỆU PHƯƠNG PHÁP**

Trong kỹ thuật, ta thường gặp bài toán: Tìm nghiệm thực của phương trình f(x)=0. Đối với các phương trình đa thức bậc lớn hơn 3 hay các loại phương trình phức tạp khác thì hầu như sẽ gặp khó khăn trong việc đi tìm nghiệm đúng của phương trình. Hơn nữa, khi làm việc với số ở dạng số thập phân, tìm được nghiệm đúng của phương trình trong dạng số thập phân vô hạn ta phải quy tròn số thì nghiệm thu được sẽ là nghiệm gần đúng. Như vậy, để tìm được nghiệm thực gần đúng của phương trình ta phải tiến hành theo các bước sau:

1) Chọn xấp xỉ đầu ��0

2) Từ ��0, tìm thuật toán để sửa dần nghiệm, được các xấp xỉ mới gần với nghiệm hơn

3) Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng tìm được

Và một trong những thuật toán sửa dần nghiệm để thu được nghiệm gần đúng là *phương pháp lặp đơn* (lặp cổ điển).

**II. LÝ THUYẾT**

**1. Bài toán**

Giải phương trình f(x) = 0 có khoảng cách ly nghiệm �� cho trước (a,b) **2. Nhắc lại về khoảng cách ly nghiệm**

Khoảng (a,b) được gọi là khoảng cách ly nghiệm của phương trình f(x) = 0 nếu trong khoảng (a,b) có đúng một nghiệm của phương trình.

*Định lý: Nếu f(x) liên tục và đơn điệu trên (a,b) và f(a).f(b) < 0 thì (a,b) là khoảng cách ly nghiệm của phương trình f(x) = 0.*

Phương pháp tìm khoảng cách ly nghiệm:

• Phương pháp khảo sát hàm số (lập bảng biến thiên)

• Phương pháp vẽ đồ thị hàm số

3

**3. Phương pháp lặp đơn**

*a. Ý tưởng bài toán*

Viết lại phương trình ��(��) = 0 trong dạng sau:

�� = ��(��)

��(��) là hàm số liên tục trên [a,b]

*b. Xây dựng công thức*

Chọn x0 bất kỳ thuộc [a,b] làm xấp xỉ đầu và tính ��1 = ��(��0), ��2 = ��(��1), ��3 = ��(��2)…

Tổng quát: ���� = ��(����−1) với n = 1, 2, 3… (1) Đây chính là quá trình lặp, n là thứ của phép lặp.

*c. Sự hội tụ của phương pháp*

**Định nghĩa sự hội tụ của quá trình lặp:** quá trình lặp (1) gọi là hội tụ, nếu dãy {xn} tính theo (1) hội tụ khi n→∞.

Trong trường hợp này, dãy {xn} tính theo (1) hội tụ, nghĩa là lim ��→∞���� = ��̅.

Nhưng do ��(��) là hàm số liên tục trên [a,b] nên

��→∞��(����−1) = ��[lim

��→∞���� = lim

lim

Từ đó ta suy ra ��̅= ��(��̅).

��→∞����−1]

Vậy trong trường hợp đó thì ��̅= �� là nghiệm của �� = ��(��), cũng là nghiệm của phương trình ��(��) = 0

**Điều kiện hội tụ của hội tụ của phương pháp (điều kiện co):**

*Định lý : Nếu (a,b) là khoảng cách ly nghiệm* �� *của phương trình x = g(x) và g(x) là hàm số liên tục, có đạo hàm liên tục trên [a,b] thoả mãn :*

4

|��′(��)| ≤ �� < 1 ∀�� ∈ [��, ��]

*thì với* ��0 *bất kì* ∈ *[a,b], dãy* ���� = ��(����−1) *hội tụ và hội tụ tới* ��. Chứng minh. Do g(x) liên tục trên [a,b] và khả vi trong (a,b) Theo định lí Lagrange, ta có :

��(��0) − ��(��) = ��′(��1) (��0 – ��) với ��1 là trị trung gian nằm giữa ��0 và ��

Do �� là nghiệm của x = g(x) nên �� = ��(��), ��1 = g(��0) nên | ��1 − �� | = | ��′(��1) |.| ��0 − �� |

| ��1 − �� | ≤ �� | ��0 − �� |

Tương tự, ta có:

| ��2 − �� | ≤ �� | ��1 − �� |

…

| ���� − �� | ≤ �� | ����−1 − �� |

Nhân vế với vế các bất đẳng thức trên

| ���� − �� | ≤ ����| ��0 − �� |

Do 0 < | ��′(��) | ≤ �� < 1 nên khi n → ∞ thì ���� → �� (theo nguyên lý kẹp) Hay lim

��→∞���� = �� với ��0 bất kì ∈ [a,b]

*d. Công thức đánh giá sai số*

Trong tính toán, dãy xn = g(xn−1) không thể lặp với số lần lặp vô hạn mà phải dừng lại ở bước lặp thứ n nào đó. Cho nên, cần phải đánh giá sai số qua hai công thức sai số sẽ được trình bày sau đây:

• *Công thức sai số thứ nhất:*

5

Theo định lý Lagrange và điều kiện co, ta có:

| ���� − �� | ≤ �� | ����−1 − �� | = �� | (����−1 − ����) + (���� − ��) | ≤ �� | ����−1 − ����| + �� | ���� − �� |

(1 − ��)| ���� − �� | ≤ �� | ����−1 − ����|

| ���� − �� | ≤��

1 − ��|���� − ����−1|

Để nghiệm gần đúng đến sai số là �� > 0, bé tùy ý thì

| ���� − �� | ≤��

1 − ��|���� − ����−1| ≤ ��

| ���� − ����−1| ≤1 − ��

����

Đây là công thức đánh giá sai số theo hai phép lặp liên tiếp và được gọi là *công thức sai số hậu nghiệm.*

• Công thức sai số thứ hai:

Theo định lí Lagrange, ta có

| ��(����−1) − ��(����−2) | = | ��′(��) |. | ����−1 − ����−2 |

Trong đó c là trị trung gian nằm giữa ����−1 và ����−2

| ���� − ����−1| ≤ �� | ����−1 − ����−2|

mà | ���� − �� | ≤��

1−��|���� − ����−1| nên

1 − ��|���� − ����−1| ≤��2

| ���� − �� | ≤��

1 − ��| ����−1 − ����−2| ≤��3

1 − ��| ����−2 − ����−3| ≤ ⋯ ≤

6

≤����

1 − ��| ��1 − ��0|

Để nghiệm gần đúng đến sai số là �� > 0, thì

| ���� − �� | ≤����

1 − ��| ��1 − ��0| ≤ ��

| ��1 − ��0| ≤1 − ��

������

Đây là công thức đánh giá sai số theo hai phần tử đầu tiên của dãy và được gọi là *công thức sai số tiên nghiệm.*

từ | ��1 − ��0| ≤1−��

������

| ��1− ��0|�� => ��. ������ ≤ ���� |(1−��)��

suy ra ���� ≤1−�� hay �� ≥ [���� |(1−��)��

��1− ��0|

��1− ��0| / ������] (���� ������ < 0)

Đến đây ta có thể tìm được số phép lặp cần thiết là [n]+1 để đạt được sai số �� > 0 mong muốn trước khi quá trình lặp diễn ra.

*e. Đánh giá phương pháp*

• Ưu điểm : có thể chọn xấp xỉ đầu ��0 bất kì trong [a,b], thuật toán đơn giản

• Nhược điểm : không có phương pháp tổng quát đưa phương trình f(x) = 0 về phương trình x = ��(��). Phương pháp lặp đơn chỉ giải được phương trình có sẵn dạng x = ��(��) hoặc đưa được về dạng này, thoả mãn điều kiện co.

**III. THUẬT TOÁN**

*1. Chương trình chính*

**INPUT**: a, b, xo, ��, g

7

**OUTPUT**: Nghiệm gần đúng của phương trình.

Bước 1 : Nhập a, b, xo, ��, g

Bước 2 : Sử dụng gói kiểm tra đầu vào

Bước 3 : Khởi tạo hàm |��′(��)|

Bước 4 : Tìm q bằng Gói giá trị lớn nhất

Bước 5: Khởi tạo gói lặp đơn tiên nghiệm và gói lặp đơn hậu nghiệm Bước 6 : Kiểm tra điều kiện co, in ra kết quả và kết thúc

2. *Gói kiểm tra đầu vào*

**INPUT**: a, b, xo

**OUTPUT**: input của chương trình chính đã hợp lệ

*(lưu ý: a là cận dưới, b là cận trên)*

Bước 1 : Nhận a, b, xo

Bước 2 : Nếu a ≥ b thì yêu cầu nhập lại

Bước 3 : Nếu xo < a hoặc xo > b thì yêu cầu nhập lại

Bước 4 : Kết thúc gói kiểm tra

*3. Khởi tạo hàm* |��′(��)|

**INPUT**: g(x)

**OUTPUT**: |��′(��)|

Bước 1 : Nhận g

Bước 2 : Khởi tạo số ���������� > 0 bé tuỳ ý cho trước

Bước 3 : ���� = ��(�� + ����������) − ��(�� − ����������), ���� = 2 ∗ ���������� Bước 4 : |��′(��)| = | ���� / ���� | và kết thúc

8

Chú ý : Hàm |��′(��)| trong chương trình có tên là ������\_��\_��ℎ���� |��′(��)| = | ���� / ���� | là do :

2��′(��) = lim

∆��→0

��ê�� ��′(��) = lim ∆��→0

��(�� + ∆��) − ��(��)

∆��+ lim

∆��→0

��(�� + ∆��) − ��(�� − ∆��) 2∆��

��(��) − ��(�� − ∆��) ∆��

*4. Gói giá trị lớn nhất*

**INPUT**: a, b, ��

**OUTPUT**: max �� trên [a,b]

Bước 1 : Nhập a, b, ��

Bước 2 : Khởi tạo bước nhảy ������ > 0 bé tuỳ ý cho trước và max = ��(a) Bước 3 : �� = �� + ������, nếu i > b thì sang bước 5

Bước 4 : Nếu ��(��) > max thì max = ��(i) quay lại bước 3 Bước 5 : Đưa ra kết quả là max và kết thúc

Chú ý : khi nhập �� = |��′(��)| ta sẽ có q = max |��′(��)|

*5. Gói lặp đơn tiên nghiệm*

**INPUT**: xo, q, ��, g

**OUTPUT**: nghiệm gần đúng của phương trình

Bước 1 : Nhận xo, q, ��, g

Bước 2 : Tính x = g(xo)

Bước 3 : Nếu x = xo thì nghiệm cần tìm là x = xo

Bước 4 : n = ln|(1−��)��

�� – ���� | / lnq ,sau đó n = [n] + 1

9

Bước 5 : for i = 2 to n do x = g(x)

Bước 6 : Đưa ra kết quả nghiệm cần tìm là x và kết thúc

*6. Gói lặp đơn hậu nghiệm*

**INPUT**: xo, q, ��, g

**OUTPUT**: nghiệm gần đúng của phương trình

Bước 1 : Nhận xo, q, ��, g

Bước 2 : Tính x = g(xo)

Bước 3 : Nếu x = xo thì nghiệm cần tìm là x = xo

Bước 4 : Kiểm tra | �� − ��0| <1 − ��

����. Nếu thoả mãn, dừng thuật toán, nghiệm

cần tìm là x và kết thúc

Bước 5 : xo = x, x = g(x), quay lại bước 4

*7. Gói điều kiện co*

**INPUT**: q

**OUTPUT:** nghiệm gần đúng (theo cả hai công thức sai số)

Bước 1 : Nhận q

Bước 2 : Nếu 0 < q <1 thì sử dụng cả hai gói lặp đơn tiên nghiệm và hậu nghiệm

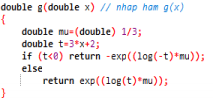
Bước 3 : Nếu q <=0 hoặc q>=1 thì in ra hàm g(x) không thoả mãn điều kiện co Bước 4 : Kết thúc chương trình

**IV. CHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ**

3 với k.c.l (1.5,2.5)

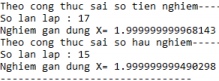
*1. Ví dụ 1*: Giải gần đúng phương trình x= √3�� + 2

10

**INPUT**: 

(do hạn chế về kĩ thuật lập trình nên chúng em sẽ nhập hàm trực tiếp trên IDE) 

**OUTPUT**:



3trong khoảng cách ly (1.5,2.5) có nghiệm x=2

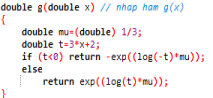
Phương trình x= √3�� + 2

Ví dụ cho thấy chương trình có chạy qua kết quả đúng đến sai số epsilon = 1.0e-9 nhập từ bàn phím, chứng minh code hoạt động.

3 với k.c.l (−1.5, −0.5)

*2 .Ví dụ 2:* giải gần đúng phương trình x= √3�� + 2

**INPUT**:

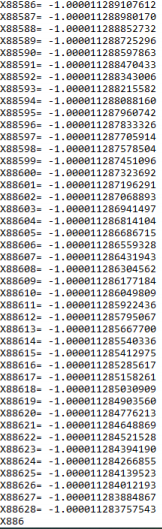
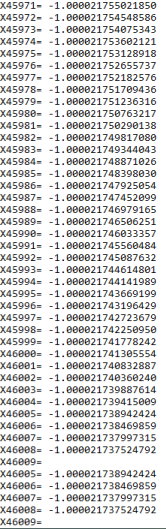




**OUTPUT**:

11

Đây là trường hợp g(x) không thoả mãn điều kiện ánh xạ co, nếu vẫn để quá trình lặp diễn ra sẽ bị rơi vào trạng thái lặp vô hạn:



Dựa vào vòng lặp vô hạn trên ta vẫn có thể dự đoán được nghiệm của 3trong khoảng cách ly (−1.5, −0.5) là x= −1 khi mà phương trình x= √3�� + 2

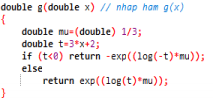
nghiệm có xu hướng hội tụ về −1 .Tất nhiên, dự báo này chỉ có thể làm được

12

trong một số trường hợp nhất định ví dụ như trong trường hợp này (không phải mọi trường hợp điều dự báo được khi quá trình lặp rơi vào trạng thái vô hạn.

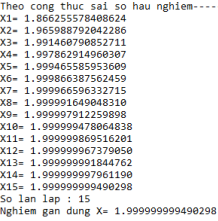
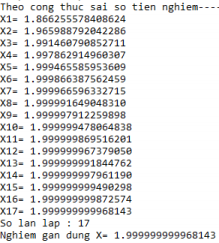
3 với k.c.l (1.5,2.5)

*3. Ví dụ 3*: giải gần đúng phương trình x= √3�� + 2

Quay trở lại với ví dụ 1 ở trên để so sánh độ chính xác của công thức sai số **INPUT**: 



**OUTPUT**:



Trong quá trình test độ chính xác của 2 công thức lặp đơn tiên nghiệm và hậu nghiệm, chúng em nhận thấy không có công thức nào luôn cho độ chính xác luôn cao hơn (lúc có công thức tiên nghiệm chính xác hơn, nhưng có lúc công thức hậu nghiệm lại chính xác, có lúc độ chính xác của 2 công thức là tương đối

13

nhau). Điều này có thể đến từ thuật toán tính đạo hàm ��′(��) , thuật toán tìm �� = max|��′(��)| còn chưa được tối ưu khi vẫn có hạn chế ở bước chọn ����������, ������ bé tuỳ ý khiến sai số trong quá trình tính toán còn khá lớn; và cũng có thể do kết quả phụ thuộc vào xấp xỉ đầu ��0 mà ta chọn.

14

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

Lê Trọng Vinh (2007). *Giáo trình Giải tích số*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

15